PAP1
Versuch 13: "Resonanz"

Jonas Schweer

September 13, 2024

1 Einleitung

1.1 Was soll gemessen werden?

In diesem Experiment wollen wir auf verschiedene Weisen die Dämpfungskonstante zwei verschieden starker Wirbelstrombremsen bestimmen. Dazu bestimmen wir zuerst die Halbwertszeit eines gedämpften Pendels und können so auf die Konstante schließen. Ein zweiter Weg wir das Anregen der Schwingung durch einen externen Motor beinhalten, indem wir die Resonanzkurve aufzeichnen und so über Halbwertsbreite und über Resonanzüberhöhung Rückschlüsse auf die Dämpfungskonstante ziehen können. Zum Schluss vergleichen wir noch die Eigenfrequenz ω_0 mit der Resonanzfrequenz ω'.

1.2 Aufbau des Versuches und Messmethode

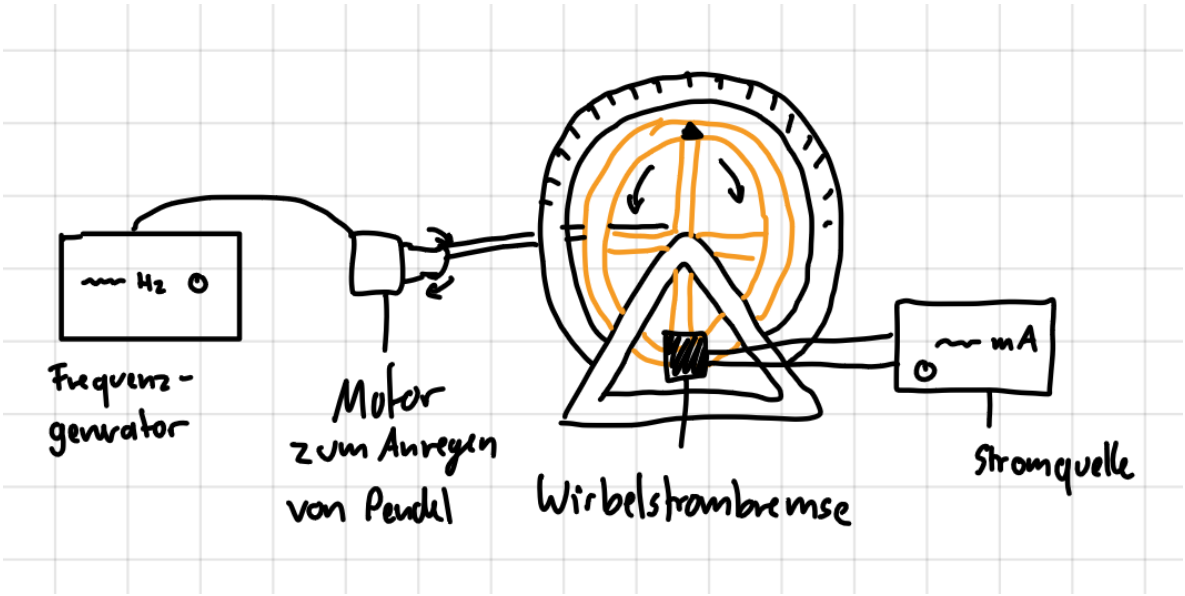


Figure 1: Versuchsaufbau mit allen relevanten Instrumenten

Aufgezeichnet in Figure 1 ist ein Drehpendel, welches an seinem unteren Teil eine Wirbelstrombremse angebracht hat, und welches mit einem Motor zur Anregung der Schwingung verbunden ist. Für unsere erste Messreihe bleibt allerdings Motor sowie Wirbelstrombremse erst einmal ausgeschaltet.

Wir lenken das Pendel eine beliebige Weite aus und stoppen mit einer Stoppuhr drei mal die Zeit, die vergeht, bis das Pendel 20 Perioden durchlaufen hat.

Bei unserer zweiten Messreihe schalten wir nun die Wirbelstrombremse ein, welche durch ein Magnetfeld das sich bewegende Pendel ausbremst. Wir messen erneut die Periodendauer für zwei verschiedene Stromstärken, die durch die Bremse fließen. Nachdem wir diese aufgenommen haben, lenken wir das Pendel erneut bei den selben Bremsströmen aus, schreiben diesmal allerdings bei jeder Periode die momentane Amplitude auf.

Für den letzten Teil des Experiments schalten wir sowohl die Bremse ein, als auch den Motor. Wir regulieren nun mit einem Frequenzgenerator die Frequenz des Motors und schalten diese in gleichmäßigen Schritten immer höher. Wir lassen das Pendel für jede Frequenz einschwingen und notieren die Amplitude die sich einstellt. Wir erkennen einen Hochpunkt und lösen diesen mit genaueren Frequenzmessungen besser auf.

1.3 Physikalische Grundlagen

Um diesen Versuch genau verstehen zu können, müssen wir uns zuerst die Differentialgleichung des Pendels genauer anschauen. Bei einem ungedämpften Pendel gilt bekannterweise:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

Gelößt ergibt sich dann für die Bewegung des Pendels: $x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$ wobei A und B konstanten sind, die durch Anfangsbedingungen gegeben sind. Man sieht aber vor allem, dass sich diese Funktion periodisch wiederholt und somit die Amplitude sowie die Periodendauer gleich bleibt. Die Periodendauer lässt sich aus ω_0 berechnen:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2}$$

Führen wir nun allerdings eine Dämpfung ein, die sich üblicherweise proportional zur Geschwindigkeit verhält (wie in unserem Versuch), erhalten wir einen neuen Term in unserer Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

δ ist hierbei die Dämpfungskonstante welche wir später bestimmen werden.
Eine Lösung dieser Gleichung wird durch $x(t) = x_0 e^{-\delta t}\sin\omega_f t$ beschrieben. Was genau ω_f ist, wird weiter unten beschrieben. Man erkennt also, dass die Amplitude exponentiell abnimmt. Die Kurve, auf der die Amplitude liegen wird, wird also mit

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \tag{4}$$

beschrieben. a_0 ist hier die Amplitude bei $t = 0$. Wenn man die nun die Halbwertszeit kennt, also die Zeit $t_{1/2}$, bei der gilt $a(t_{1/2}) = \frac{a_0}{2}$, so kann man direkt daraus δ bestimmen:

$$\frac{a_0}{2} = a_0 e^{-\delta t_{1/2}} \Leftrightarrow \delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \tag{5}$$

Bei einem gedämpften Pendel lässt sich die Relation zwischen ω_f, der Kreisfrequenz des gedämpften Pendels, und ω_0, der Kreisfrequenz des ungedämpften Pendels, wie folgt formulieren:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{6}$$

Wenn wir nun eine äußere Kraft anlegen, beispielsweise durch einen Erregermotor, modifizieren wir die Differentialgleichung aus (3) um diese Kraft. Es ergibt sich:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F \tag{7}$$

wobei F eben genau die angelegte Kraft ist. Bei dieser Art der Schwingung, schwingt sich das Pendel zuerst ein, bevor es eine konstante Amplitude b aufweist. Die sich

einstellende Amplitude hängt von der Kreisfrequenz ω des Erregers ab. Berechnet wird sie durch:

$$b(\omega) = A\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \tag{8}$$

A ist hier die Amplitude des Erregers.
Wir können daraus die Frequenz ω' bestimmen, bei der die Amplitude am größten wird:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{9}$$

Eine weitere wichtige größe einer Resonanzkurve ist die Halbwertsbreite. Diese wird berechnet durch:

$$H = (\omega_2 - \omega_1) = 2\delta \tag{10}$$

wobei ω_1 ujnd ω_2 gerade die Frequenzen sind, bei denen gilt:

$$b(\omega_1) = b(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}b(\omega') \tag{11}$$

Die letzte Größe, die definiert werden muss, ist die Resonanzüberhöhung. Dieses wird definiert durch:

$$\frac{b(\omega')}{b(\omega \to 0)} = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{12}$$

Allerdings geht das nur, wenn man $\omega_0 \approx \omega_f$ annehmen kann, also δ besonders klein ist.

Messprotokoll Versuch 13: Resonanz

09.09.24

Harish Mahendran
Manuel Sargunfei
Jonas Schwer

Messinstrumente

Stoppuhr (Genauigkeit: Reaktionszeit ±0,2s)
Skala am Pohl'schen Rad (Genauigkeit: ±0,1cm)
Frequenzgenerator (Genauigkeit: ± 2 Hz)
Netzgerät für Dämpfung (Genauigkeit: ± 5mA)

Als erstes wollen wir die Periodendauer T_0 bestimmen für das ungedämpfte Pendel ohne äußere Kraft. Dafür lassen wir es 20 Perioden schwingen und stoppen die Zeit drei mal:

Messung Nr.	1	2	3
Zeit t [s]	39,86	39,72	39,73

↳ Zeit für 20 Perioden

$\Delta t = \pm 0{,}2s$ (Geschätzt) → Diesen Fehler benutzen wir für alle händischen Zeitmessungen

Nun messen wir die Periodendauer für die gedämpfte Schwingung. Dazu legen wir einen Strom an, der durch 2 Spulen fließt und dessen so entstehendes Magnetfeld nach der Lenz'schen Regel die Schwingung dämpft.

Anzahl Schwingungen: 15
Angelegter Strom: 280mA

⇒

Messung Nr	1	2
Zeit t [s]	29,84	29,68

Anzahl Schwingungen: 10
Angelegter Strom: 360 mA

⇒

Messung Nr	1	2
Zeit t [s]	19,80	20,06

Als nächste Messung werden wir erneut den Dämpfungsstrom anlegen und bei jeder Schwingung die Amplitude dokumentieren. Dies machen wir für 2 verschieden starke Dämpfungen, bis ca. 5% der Anfangsamplitude erreicht sind.

Dämpfungsstrom: 280mV

Schwingung Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Amplitude [cm]	15	12,2	9,9	8,1	6,6	5,4	4,4	3,4	2,8	2,2	1,8	1,5	1,1	0,9	0,7	0,5

Dämpfungsstrom: 360 mV

Schwingung Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amplitude [cm]	15	11	8,1	6	4,4	3,3	2,4	1,8	1,4	1	0,8

Nun legen wir eine äußere Kraft mit verschiedenen Erregerfrequenzen (in 200 Hz Schritten) an und lassen das Pendel schwingen. Wir tragen die Amplituden auf, die sich jeweils einstellen, wenn ein Dämpfungsstrom von 280 mA angelegt ist.

f [Hz]	300	500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900	3100	3300
a [cm]	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,7	3,9	4,4	1,6	0,9	0,6	0,5	0,4	0,3

f [Hz]	3500	3700	3900	4100
a [cm]	0,3	0,2	0,2	0,1

Wir bestimmen die Resonanzfrequenz auf ca. 2kHz. Zur genaueren Bestimmung müssen wir nun in 50Hz-Schritten um 2kHz herum.

f [Hz]	1850	1900	1950	2000	2050	2100	2150
a [cm]	2,9	3,9	5,6	7,5	6,6	4,4	3,1

Wir führen die gleiche Messung nun für einen Dämpfungsstrom von 360 mA durch.

f [Hz]	300	500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900	3100	3300
a [cm]	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,9	1,1	1,6	3,4	3,5	1,5	0,9	0,6	0,5	0,4	0,3

f [Hz]	3500	3700	3900	4100
a [cm]	0,25	0,2	0,2	0,2

f [Hz]	1850	1900	1950	2000	2050	2100	2150
a [cm]	2,7	3,4	4,2	4,8	4,4	3,5	2,7

DA 09.09.24

Aufgabe 1: Bestimmung $\bar{T}$

Zur Bestimmung der Pendeldauer bilden wir den Mittelwert der 3 gemessenen Zeiten:

$$\bar{T}_{20} = \frac{1}{3}[39,86 + 39,72 + 39,73]\,s$$

↑ Dauer von 20 Perioden

Daraus bestimmen wir die Dauer für 1 Periode:

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{60}[39,86 + 39,72 + 39,73]\,s = 1,99\,s$$

Der Fehler der mittleren Dauer beträgt weiterhin die Reaktionszeit, also $\Delta \bar{T}_{20} = \pm 0,2\,s$

Umgerechnet auf eine Periode erhalten wir: $\Delta \bar{T}_0 = \pm \frac{0,2}{20}\,s = \pm 0,01\,s$

$\Rightarrow$ $T_0 = (1,99 \pm 0,01)\,s$

Aufgabe 2: Bestimmung der Dämpfungskonstante δ graphisch.

Wir erstellen ein Diagramm, welches logarhitmisch die Amplitude gegen die Anzahl der Schwingungen aufträgt. So können wir leicht die Schwingung n, bei der die Amplitude halbiert ist, ablesen. Mit $n \cdot T_I$ können wir das in vergangene Zeit umwandeln und somit aus Formel (5) folgern, dass:

$$\delta = \frac{\ln 2}{n\,T_I}$$

(T_I ist mittlere Periodendauer mit Dämpfungsstrom I)

ΔT wird in folgendem Diagramm erst bei niedrigen Werten eingetragen, da $\Delta T \approx 0,1\,s$ sonst schwierig wird

Diagramm für Dämpfungsstrom I = 280mA

Grün: Ausgleichsgerade

Lila: Fehlergerade

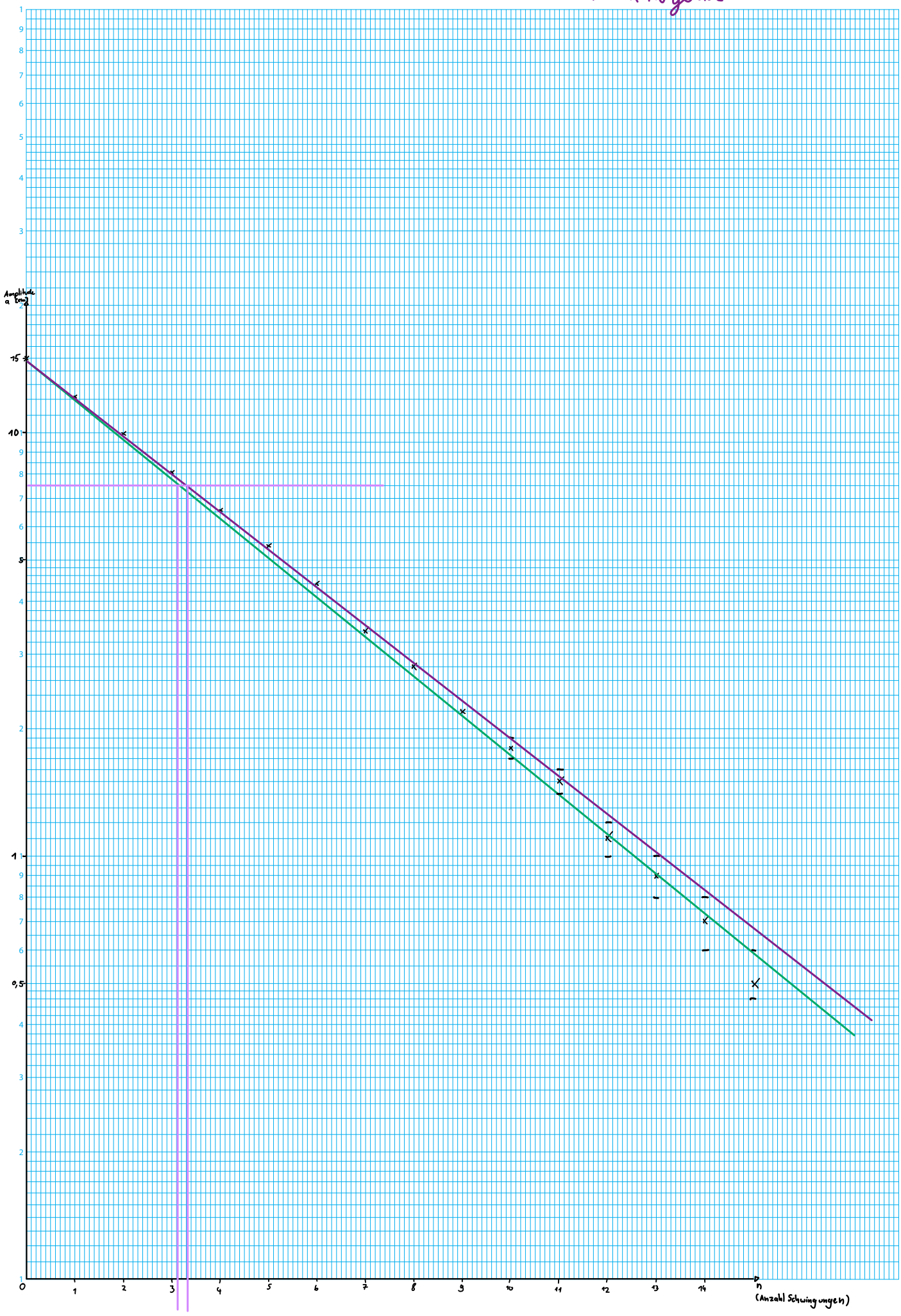
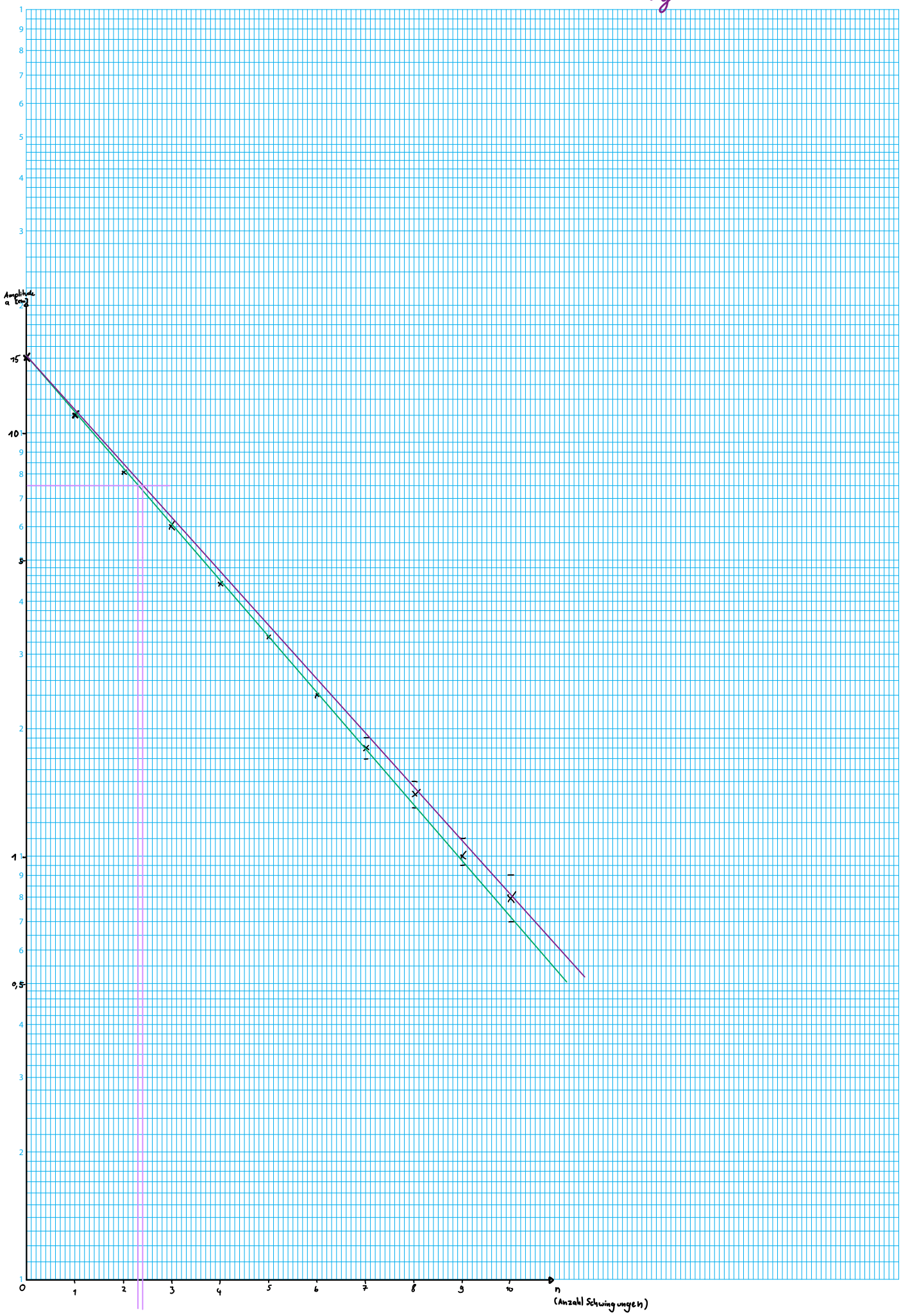


Diagramm für Dämpfungsstrom I = 360 mA

Grün: Ausgleichsgerade

Lila: Fehlergerade



Wir erhalten so für $n = 3,1 \pm 0,2$ bei einem Strom von $I_1 = 280\,mA$ und $n = 2,3 \pm 0,1$ für $I_2 = 360\,mA$.

Eingesetzt in die Formel $\delta = \frac{\ln(2)}{n T_I}$ erhalten wir:

	$\bar{T}$ [s]	δ [s^{-1}]	$\Delta\delta$ [s^{-1}]
I = 280mA	$1,98 \pm 0,01$	0,113	0,007
I = 360mA	$1,99 \pm 0,01$	0,151	0,007

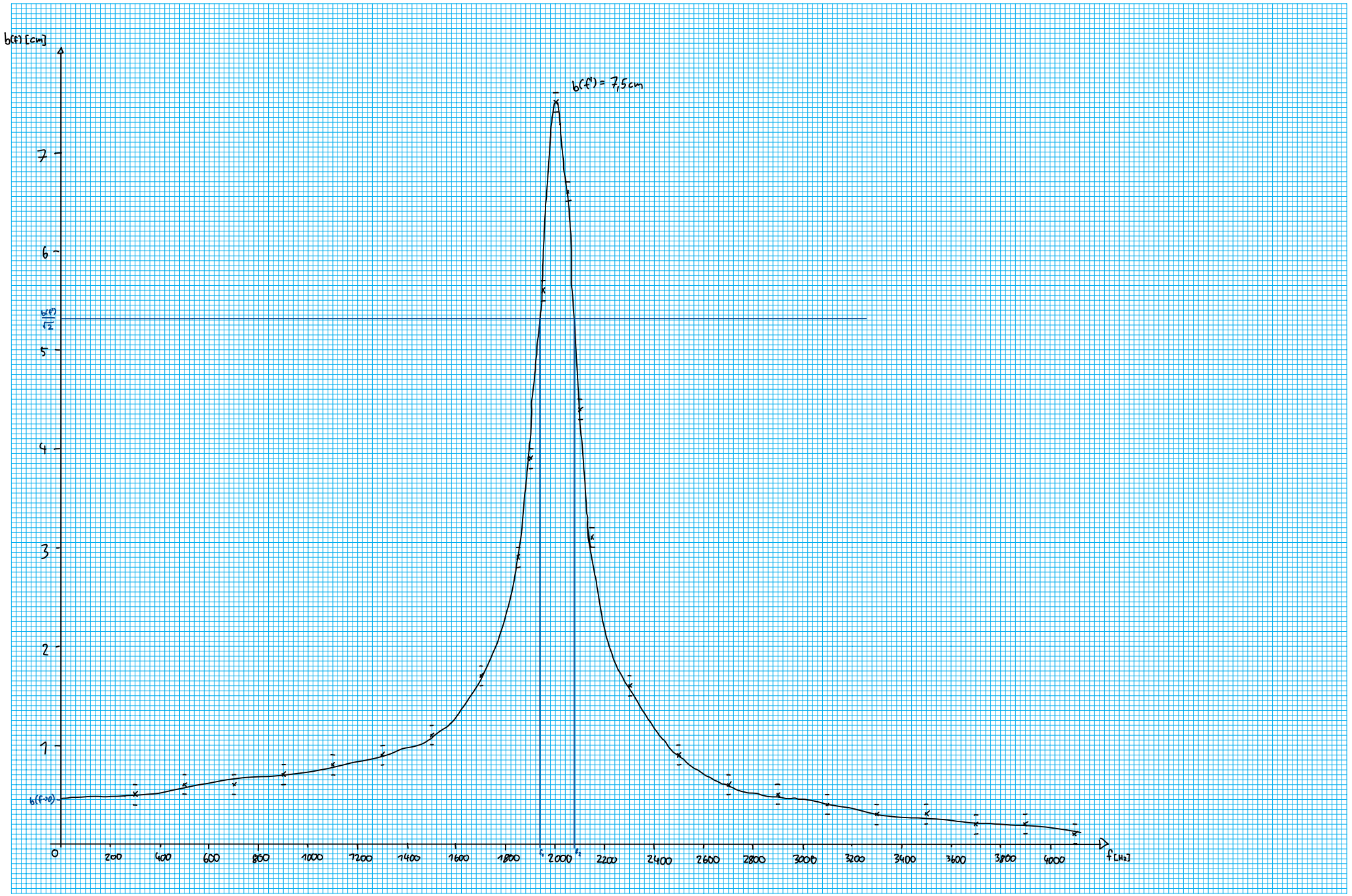
$\Delta\delta$ wird hier mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet, also so:

$$\Delta\delta = \frac{\ln(2)}{n T_I} \sqrt{\left(\frac{\Delta T_I}{T_I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)}$$

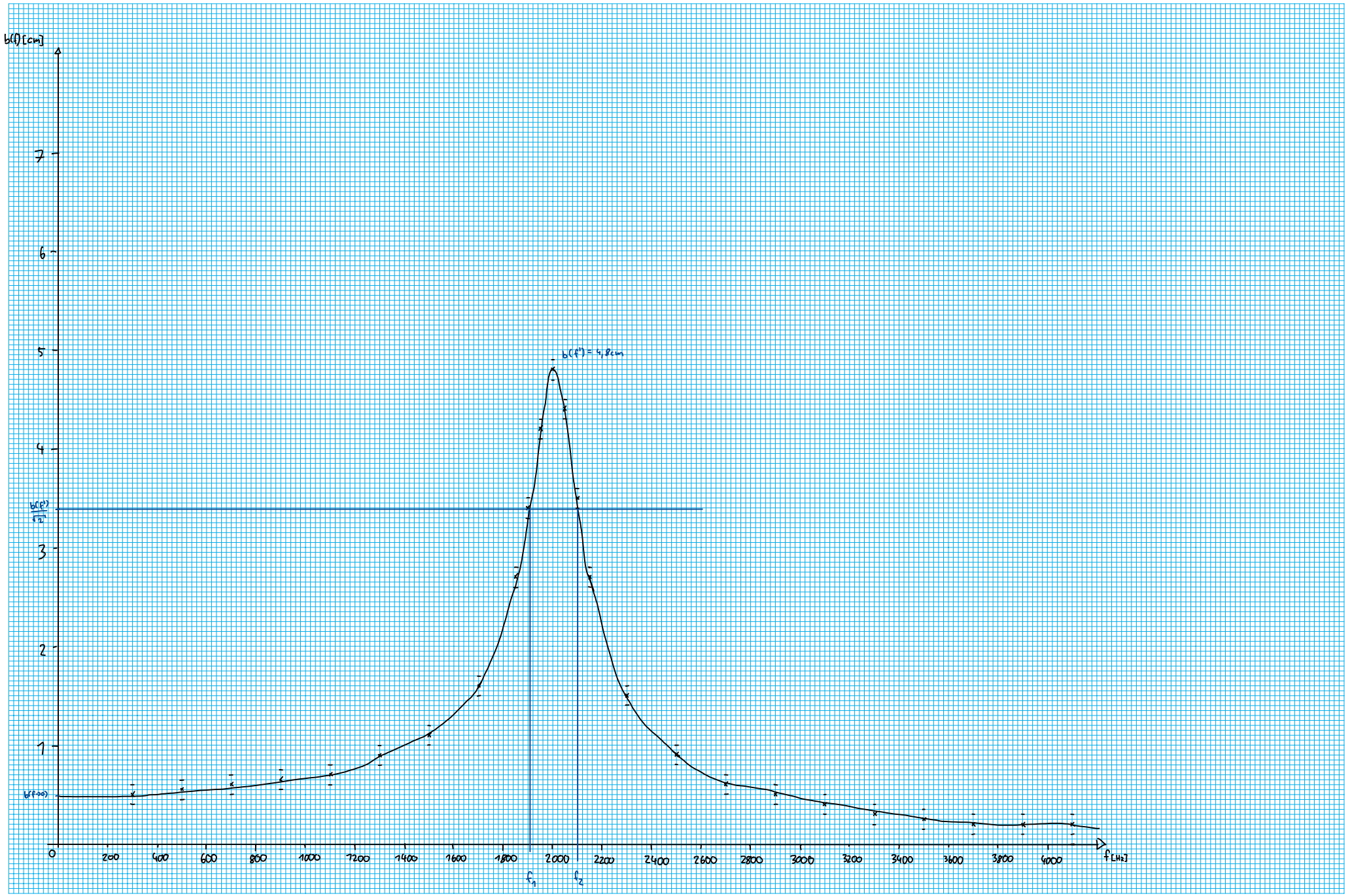
Aufgabe 3: Als nächstes soll die Amplitude pro Erregerfrequenz aufgetragen werden. Daraus können wir die Halbwertsbreite sowie die Resonanzüberhöhung bestimmen und nutzen um δ erneut zu bestimmen. Auch wollen wir jeweils das Maximum bestimmen

Der Ablesefehler hier betrug ungefähr $\Delta a = \pm 0,1\,cm$

Amplitude pro Generatorfrequenz bei Dämpfung von 280 mA



Amplitude pro Generatorfrequenz bei Dämpfung von 360 mA



Aufgetragen in eine Tabelle sieht das ganze so aus (den Fehler werde ich schätzen, da er meiner Zeichnung aufgrund des starken Anstiegs und meinen schrecklichen Linien-zieh-Künsten nicht wirklich entnehmbar ist):

	$b(f')$ [cm]	$\Delta b(f')$ [cm]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	Δf_i [Hz]	$b(f\to 0)$ [cm]	$\Delta b(f\to 0)$ [cm]
I = 280mA	7,5	0,1	1940	2070	20	0,5	0,1
I = 360mA	4,8	0,1	1910	2100	20	0,5	0,1

Wenn wir nun die Halbwertsbreite H berechnen wollen, müssen wir zunächst die Generatorfrequenz in tatsächliche Motorfrequenz umrechnen (Faktor $\frac{1}{4000}$) und das dann in Winkelgeschwindigkeit ω umwandeln ($\omega = 2\pi f$). Wenn wir nun $H = \frac{\pi}{2000}(f_2 - f_1)$ berechnet haben, halbieren wir diesen Wert nochmal und erhalten so δ

Es folgt für δ

	δ [s^{-1}]	$\Delta\delta$ [s^{-1}]
I = 280mA	0,10	0,04
I = 360mA	0,15	0,04

$$\Delta\delta = \sqrt{\left(\frac{\partial\delta}{\partial f_1}\Delta f_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial f_1}\Delta f_2\right)^2}$$

$\Delta f_1 = \Delta f_2$ ↓

$$= \frac{\pi}{2000}\sqrt{2}\,\Delta f_1$$

Um δ schließlich noch mit der Resonanzüberhöhung zu berechnen, stellen wir Formel (12) einfach nach δ um und erhalten so:

$$\delta = \frac{\omega_0}{2}\,\frac{b(f\to 0)}{b(f')}$$

$$\Delta\delta = \sqrt{\left(\frac{b(f\to 0)}{2b(f')}\Delta\omega_0\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2b(f')}\Delta b(f\to 0)\right)^2 + \left(\frac{\omega_0\, b(f\to 0)}{b(f')^2}\Delta b(f')\right)^2}$$

Zuerst müssen wir allerdings ω_0 bestimmen. Dies machen wir mit T_0 aus Aufgabe 1:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad ; \quad \Delta\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0^2}\Delta T_0$$

Für das ungedämpfte Pendel gilt also: $\omega_0 = 3{,}157\ s^{-1}$

$$\Delta\omega_0 = 0{,}016\ s^{-1}$$

Jetzt können wir δ auf einem dritten Weg berechnen:

	$\delta\,[s^{-1}]$	$\Delta\delta\,[s^{-1}]$
I = 280mA	0,105	0,021
I = 360mA	0,164	0,03

Wenn wir nun nochmal alle berechneten Werte für δ zusammentragen, erhalten wir folgende Werte:

	δ_1	δ_2	δ_3
$I = 280mA$	$(0,113 \pm 0,007)s^{-1}$	$(0,10 \pm 0,04)s^{-1}$	$(0,105 \pm 0,021)s^{-1}$
$I = 360mA$	$(0,151 \pm 0,007)s^{-1}$	$(0,15 \pm 0,04)s^{-1}$	$(0,164 \pm 0,03)s^{-1}$

Table 1: Alle Ergebnisse für δ zusammengefasst

Die zwei wichtigen Werte der Kreisfrequenzen waren:

- $\omega_0 = (3,157 \pm 0,016)s^{-1}$
- $\omega' = (3,14 \pm 0,01)s^{-1}$ (bei beiden Dämpfungsströmen)

4 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Um alles noch einmal zusammenzufassen haben wir zu aller erst die Periodendauer unseres Pendels ohne Dämpfung und ohne Erregung gemessen. Daraufhin haben wir gemessen, wie schnell die Amplitude bei zwei verschiedenen Dämpfungsströmen abnimmt, haben daraus die Halbwertszeit bestimmen können und konnten damit letztendlich das erste mal die Dämpfungskonstante bestimmen. Daraufhin haben wir eine Erregerfrequenz hinzugeschaltet und für die beiden Dämpfungsströme abgemessen, welche Amplitude sich einstellt. Wir haben dies für mehrere Frequenzen durchgeführt um so eine Resonanzkurve zu erstellen, aus welcher wir die Halbwertsbreite und die Resonanzüberhöhung bestimmen konnten. Diese beiden Werte konnten wir benutzen, um auf zwei neuen Wegen δ zu bestimmen. Auch haben wir die Resonanzfrequenz ω' bestimmen können. Verglichen mit ω_0 finden wir mit

$$\sigma = \frac{|x - y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{13}$$

(wobei x und y hier durch ω' und ω_0 ersetzt werden) heraus, dass sie sich nur um $0,9\sigma$ unterscheiden. Die Abweichung der beiden ist also nicht sonderlich groß, vor allem weil die Fehler auch nicht wirklich groß sind. Benutzen wir (13) erneut für die berechneten Fehler, erhalten wir für die einzelnen Fehler:

$I = 280mA$

- σ-Abstand von $\delta_1\delta_2$: $0,32\sigma$
- σ-Abstand von $\delta_1\delta_3$: $0,36\sigma$
- σ-Abstand von $\delta_2\delta_3$: $0,11\sigma$

$I = 360mA$

- σ-Abstand von $\delta_1\delta_2$: $0,02\sigma$
- σ-Abstand von $\delta_1\delta_3$: $0,42\sigma$

- σ-Abstand von $\delta_2\delta_3$: $0,28\sigma$

Alles in allem sind die σ-Abweichungen sehr klein geworden. Das wird sicherlich auch daran liegen, dass bei Messung 2 und 3 der Fehler relativ groß geworden ist, allerdings liegt das an der händischen Zeichnung. Trotzdem bin ich sehr zufrieden mit unseren Ergebnissen.
Wenn ich das Experiment erneut durchführen würde, würde ich zum einen das Aufzeichnen der Amplitude einfacher gestalten (z.B durch ein aufgenommenes Video), da es während dem Versuch eher mühsam war, schnell genug die Amplituden abzulesen. Zudem würde ich (vor allem für die Resonanzkurve) einen Computer die Kurve zeichnen lassen, da so das Zittern meiner Hand nicht dazu führt, dass ich 300x den Messwert nicht mit der Linie treffe (Ja, ich hatte große Probleme beim zeichnen).